Leçon 152 : Déterminant. Exemples et applications.

- **Développement 1** : **Cyclicité de $\mathbb{F}_p^\times$**
- **Développement 2** : **Calcul de caractères de D_n**
- **Développement 3** : **Générateurs de $SL_2(\mathbb{Z})$**
- **Développement 3** : **Générateurs de $GL_n(\mathbb{R})$**

G désignera un groupe.

1 Génération d'un groupe

Définition 1. *Soit $A \subset G$ une partie de G. On appelle* ***sous groupe engendré par*** *A l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant A. On le note $< A >$.*

Proposition 2. *Le groupe $< A >$ est le plus petit sous groupe de G contenant A. Et ses éléments sont les produits finis d'éléments de A et de leurs inverses.*

Définition 3. *Soit $A \subset G$. On dit que A* ***engendre*** *G si $< A >= G$, et il est de* ***type fini*** *si A est finie. Dans ce cas A peut s'écrire comme un n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ appelé* ***système générateur****, et on note :*

$$< x_1, \cdots, x_n >= G$$

Exemple 4. $< 1 >= \mathbb{Z}$

2 Cas des groupes abéliens

Groupes monogènes et cycliques

Définition 5. *groupe abélien*

Définition 6. *Groupe monogène et cyclique*

Exemple 7. $\mathbb{Z}$

Proposition 8. *L'image d'un groupe monogène par un morphisme de groupe est monogène.*

Groupe des racines n-ieme

Groupes abéliens finis de types finis

Théorème 9. *Théorème des restes chinois*

3 Groupes symétriques et diédraux

Groupe symétrique

Définition 10. *Soit $n \geqslant 1$. On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des bijections de $[\![1, n]\!]$. On l'appelle le groupe symétrique à n éléments. On a donc $|\mathfrak{S}_n| = n!$*

Groupe diédral

4 Générateurs en algèbre linéaire

Groupe linéaire et spécial linéaire

Groupe orthogonal